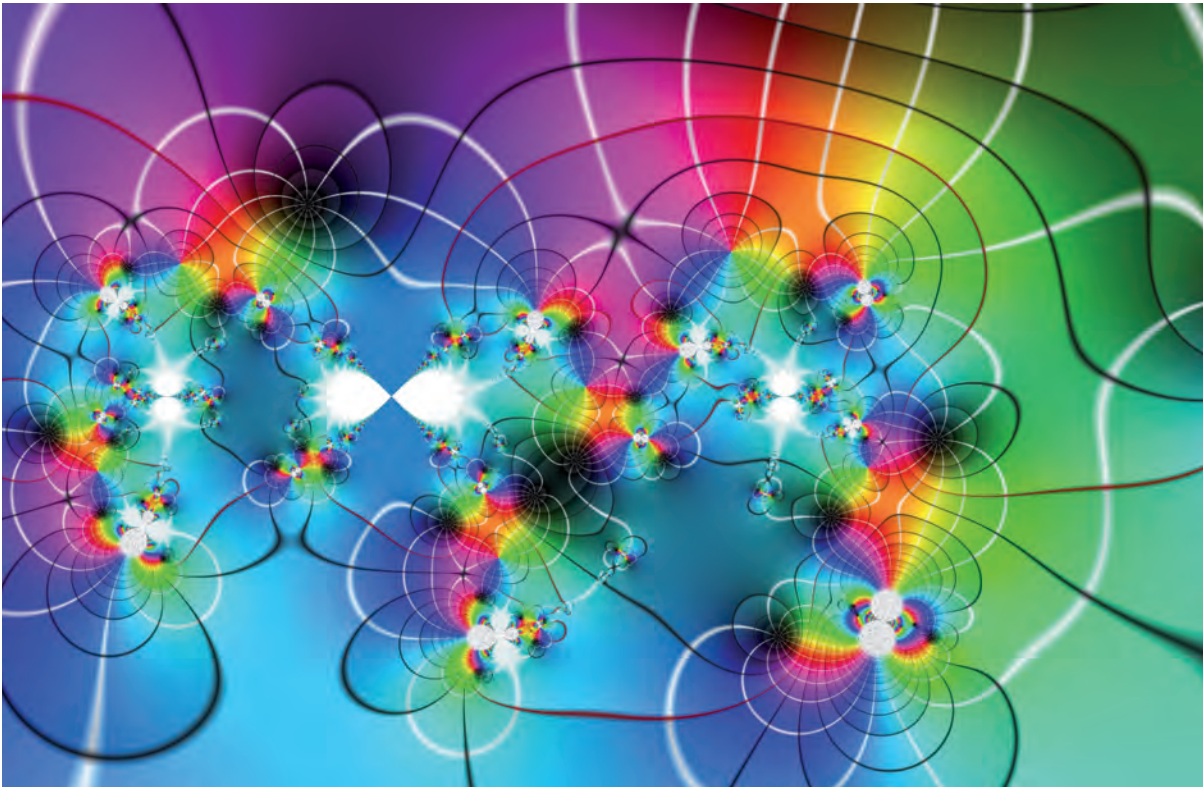


Gebietseinfärbung ...



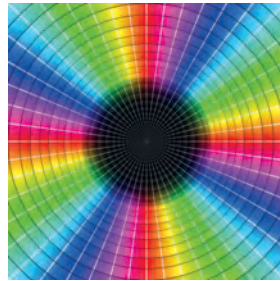
Visualisierung einer komplexwertigen Funktion

Komplexe Funktionen (in einer Variablen) sind Abbildungen von der Gauß'schen Zahlenebene \mathbb{C} nach \mathbb{C} . Zur Visualisierung verwenden wir hier eine neue Entwicklung der Gebietseinfärbung, bei der wesentliche Eigenschaften der Funktion farblich dargestellt werden. Längs schwarzer Linien sind die Beträge der Funktions-

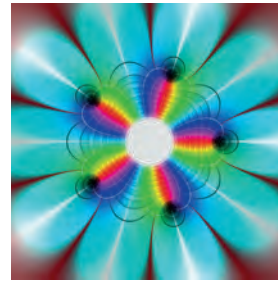
werte konstant, und längs weißer Linien das Argument. Nullstellen und Polstellen sind an schwarzen bzw. weißen Punktzentren erkenntlich, die hier zwölf oder mehr einlaufende, weiße Linien besitzen. Wesentliche Singularitäten liegen bei den großen, weißen Bereichen mit den unendlich vielen, feinen Regenbogenmustern.



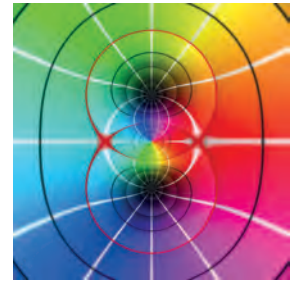
Farbschema bzw. $f(z) = z$



$f(z) = z^4$



$f(z) = 1/(z^5 - 1)$



$f(z) = (z-i)(z+i)/z$

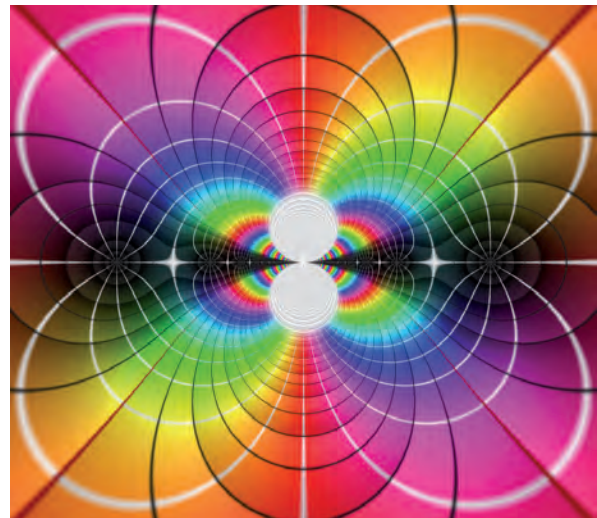
Bei der Gebietseinfärbung (engl.: domain coloring) einer Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wird der Definitionsbereich Ω anhand der Funktionswerte eingefärbt. Hierzu versteht man den Bildraum \mathbb{C} der Funktion mit einem Farbschema, wobei technisch eine Funktion $\text{col} : \mathbb{C} \rightarrow \text{Farbraum}$ verwendet wird, die jedem Funktionswert eine charakteristische Farbe zuordnet. Nun wird

Meromorphe Funktion

$$f(z) = (z-1)(z+1)^2 / ((z+i)(z-i)^2)$$

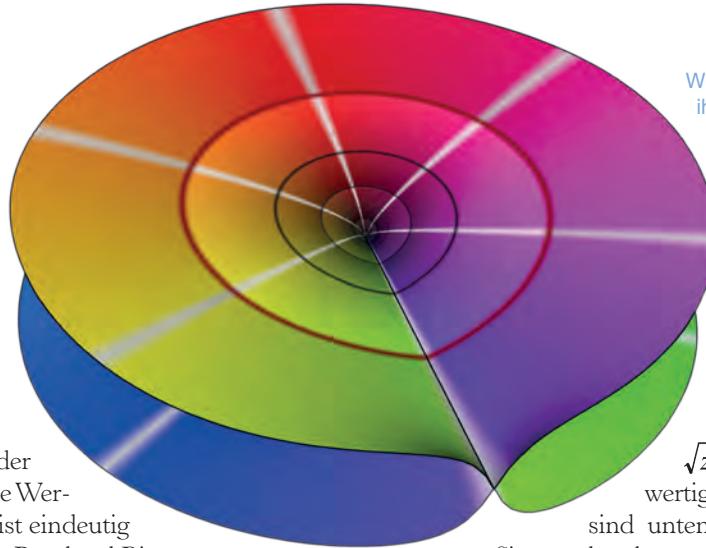
aus der komplexen Funktion f und der Farbfunktion col eine Einfärbung des Definitionsbereiches erstellt: jeder Punkt $z \in \Omega$ erhält den Farbwert $\text{col}(f(z))$, wird also anhand des Funktionswertes von f an dieser Stelle eingefärbt. Das hier verwendete Farbschema ist oben links gezeigt, und es ist gleichzeitig als Einfärbung von $f(z)=z$ interpretierbar.

Funktion $f(z) = z \sin(1/z)$
mit wesentlicher Singularität



... und Riemann'sche Flächen

Die Wurzelfunktion \sqrt{z} sowie viele andere Funktionen sind mehrwertig und besitzen an jeder Stelle der komplexen Ebene zwei oder mehr Funktionswerte. Zum Beispiel hat $\sqrt{1}$ die Werte 1 oder -1 , ebenso hat $\sqrt{-1}$ die Werte i und $-i$, nur $\sqrt{0}$ ist eindeutig 0 . Nach einer Idee von Bernhard Riemann werden mehrwertige Funktionen allerdings eindeutig, wenn man als Definitionsbereich geeignete verzweigte Überlagerungen der komplexen Ebene verwendet. Für die Wurzelfunktion, die fast überall zweiwertig ist, ver-

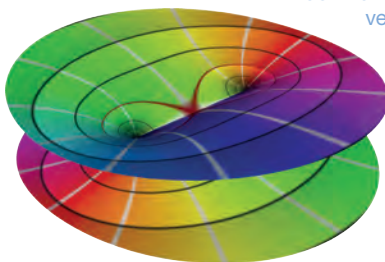


Wurzelfunktion \sqrt{z} ist auf ihrer Riemann'schen Fläche eingefärbt. Die Fläche besteht aus zwei Blättern, die längs der negativen reellen Achse verklebt und bei $z=0$ verzweigt sind.

wendet man eine zweifache Überlagerung (oben).

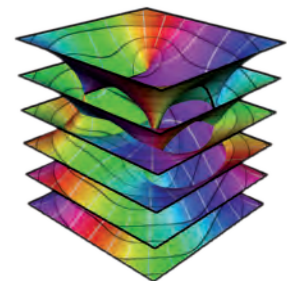
Auch die Funktion $\frac{\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}}$ ist zweiwertig. Ihre beiden Blätter sind unten als Quadrate gezeigt.

Sie werden längs der Verbindungsstrecke der zwei Verzweigungspunkte -1 und $+1$ zusammengeheftet, und dabei blau mit blau und grün mit grün verbunden. Auf der räumlichen Darstellung (links unten) entsteht dadurch ein kontinuierlicher Farbverlauf.



Die Riemann'sche Fläche der Funktion $\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$ ist an den Punkten $z=1$ und $z=-1$ verzweigt, ähnlich wie die Wurzelfunktion oben.

Sechsfach überlagernde Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten.



Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

Die klassisch schöne Reihenentwicklung der Exponentialfunktion lautet:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

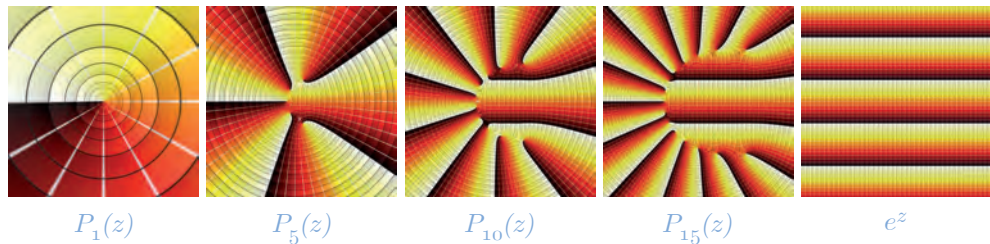
Die Exponentialfunktion besitzt weder im Reellen noch im Komplexen eine Nullstelle. Nun betrachten wir die Taylor-Entwicklung der Ordnung n ohne Restglied:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

Es handelt sich um Polynome in z , welche die Funktion umso besser annähern, je größer n ist. Solche Polynome haben jedoch mit wachsendem Grad dementsprechend viele Nullstellen. Ein Widerspruch?

Die Erklärung liegt darin, dass die Polynome ja nur innerhalb eines gewissen, immer größer werdenden, Radius um den Ursprung die Exponentialfunktion gut annähern. Weiter außen tendieren die Polynome dazu „auszuscheren“ und viele Nullstellen zu besitzen. Erst wenn n unendlich groß ist, ist die gesamte Exponentialfunktion dargestellt.

Approximation der Exponentialfunktion durch Polynome



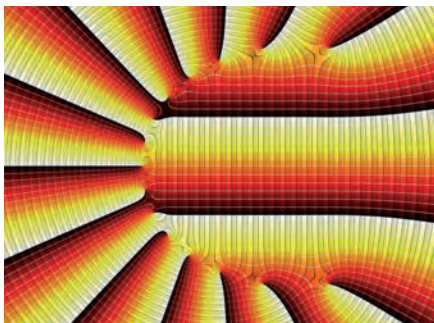
$P_1(z)$

$P_5(z)$

$P_{10}(z)$

$P_{15}(z)$

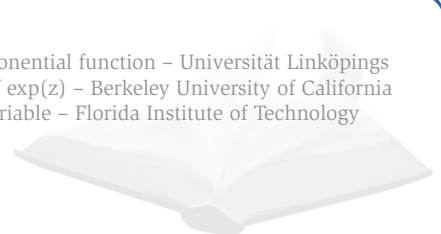
e^z



Die obige Bilderserie zeigt von links startend die Taylor-Polynome der Ordnung 1, 5, 10 und 15 sowie rechts die Exponentialfunktion, jeweils im Bereich $z = \pm 14 \pm 14i$. Das verwendete Farbschema ist ein Fächer von Schwarz über Rot und Gelb nach Weiß. Vom Nullpunkt ausgehende, radiale Strahlen sind weiß gefärbt. Man erkennt Nullstellen daran, dass lokal gesehen eine Trennlinie des weiß-schwarzen Bereichs „ausläuft“. Das geschulte Auge sieht, wie die Nullstellen mit wachsendem Polynomgrad immer weiter vom Zentrum hinausgedrängt werden. Das Bild links zeigt eine Vergrößerung für $n = 15$.

Bilder von Konstantin Poelke nach einer Idee von Hans Lundmark

H. Lundmark www.mai.liu.se/~halun/complex/taylor Taylor polynomials of the exponential function – Universität Linköpings
 F. Labelle www.cs.berkeley.edu/~flab/complex/gallery2.html The Maclaurin series of $\exp(z)$ – Berkeley University of California
 G. Abdo <http://my.fit.edu/~gabdo/function.html> Plotting Functions of a Complex Variable – Florida Institute of Technology



Die Szegö-Kurve

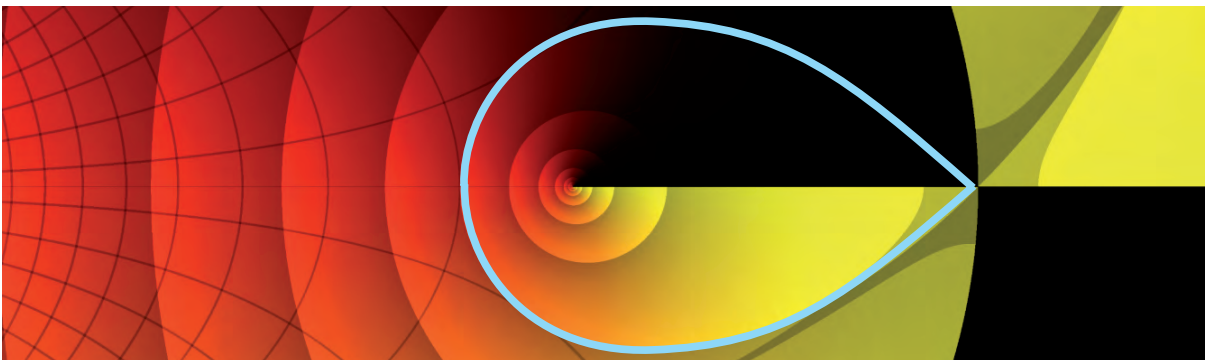
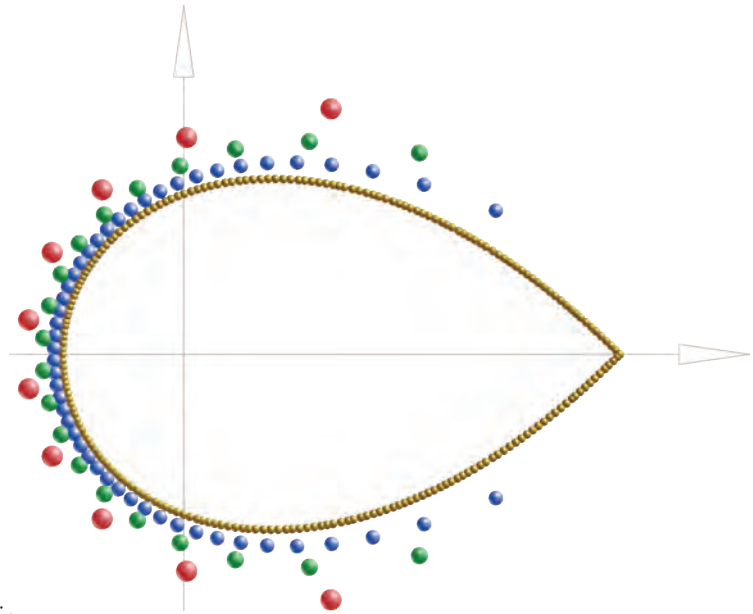
Die Nullstellen des Polynoms

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

liegen umso weiter vom Ursprung entfernt, je größer n ist. Um sich eine Vorstellung davon machen zu können, wo sie genau liegen, kann man die Zahlenebene mit dem Faktor $1/n$ verkleinern. Dadurch liegen die Nullstellen innerhalb des Einheitskreises. Für sehr große n verdichten sich die Nullstellen auf der von Gábor Szegö (1895–1985) im Jahr 1924 erstmals beschriebenen Kurve:

$$|z \cdot e^{1-z}| = 1$$

Im Bild sind die Nullstellen von $P_n(z)$ für $n = 10$, $n = 20$ und $n = 50$ rot, grün und blau eingetragen (jeweils mit dem Faktor $1/10$, $1/20$ bzw. $1/50$ verkleinert). Die „Perlenkette“ für große n ist gelb eingezeichnet.



- R. S. Varga, A. J. Carpenter *Zeros of the partial sums of $\cos(z)$ and $\sin(z)$* Numerical Algorithms 25: 363-375, 2000
 E. Rowland <http://demonstrations.wolfram.com/SzegoeCurve> Szegö Curve – Wolfram Demonstrations Project
 G. Szegö *Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe* Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, 23 (1924), 50-64
 C. Yalcin Yildirim www.math.boun.edu.tr/instructors/yildirim/paper/OnZerosOfSectionsOfExpFunction.pdf
 On the zeros of the sections of the exponential functions – Bogazici University

Polynomiographie eine Mischung aus Mathematik und Kunst

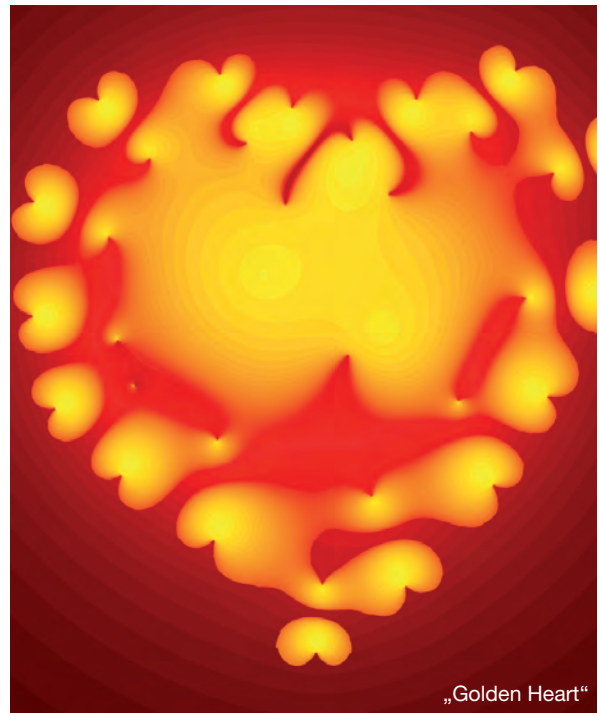
Polynomiographie (von *B. Kalantari* eingeführt) stellt Polynome in der komplexen Ebene in künstlerischer Weise dar. Unter Verwendung der Nullstellen entste-

hen kreative Bilder zwischen Kunst und Mathematik. Kalantaris Software erlaubt interaktive Eingriffe durch den Benutzer zur Veränderung der Motive.



„Butterfly“

„Butterfly“ basiert auf einer Gleichung 5. Grades, deren fünf Nullstellen letztendlich die Punkte auf seinen Flügeln sind. Ein und dieselbe Gleichung kann sehr verschiedene Bilder liefern.



„Golden Heart“

Das Bild „Golden Heart“ verwendet 17 Punkte der Ebene, welche die Nullstellen eines komplexen Polynoms 17. Grades sind. Einige Punkte sind Epizentren neuer kleinerer Herzen. Durch die Wahl des Ausschnitts kann man wiederholt neue Bilder erzeugen.

Bilder von Bahman Kalantari

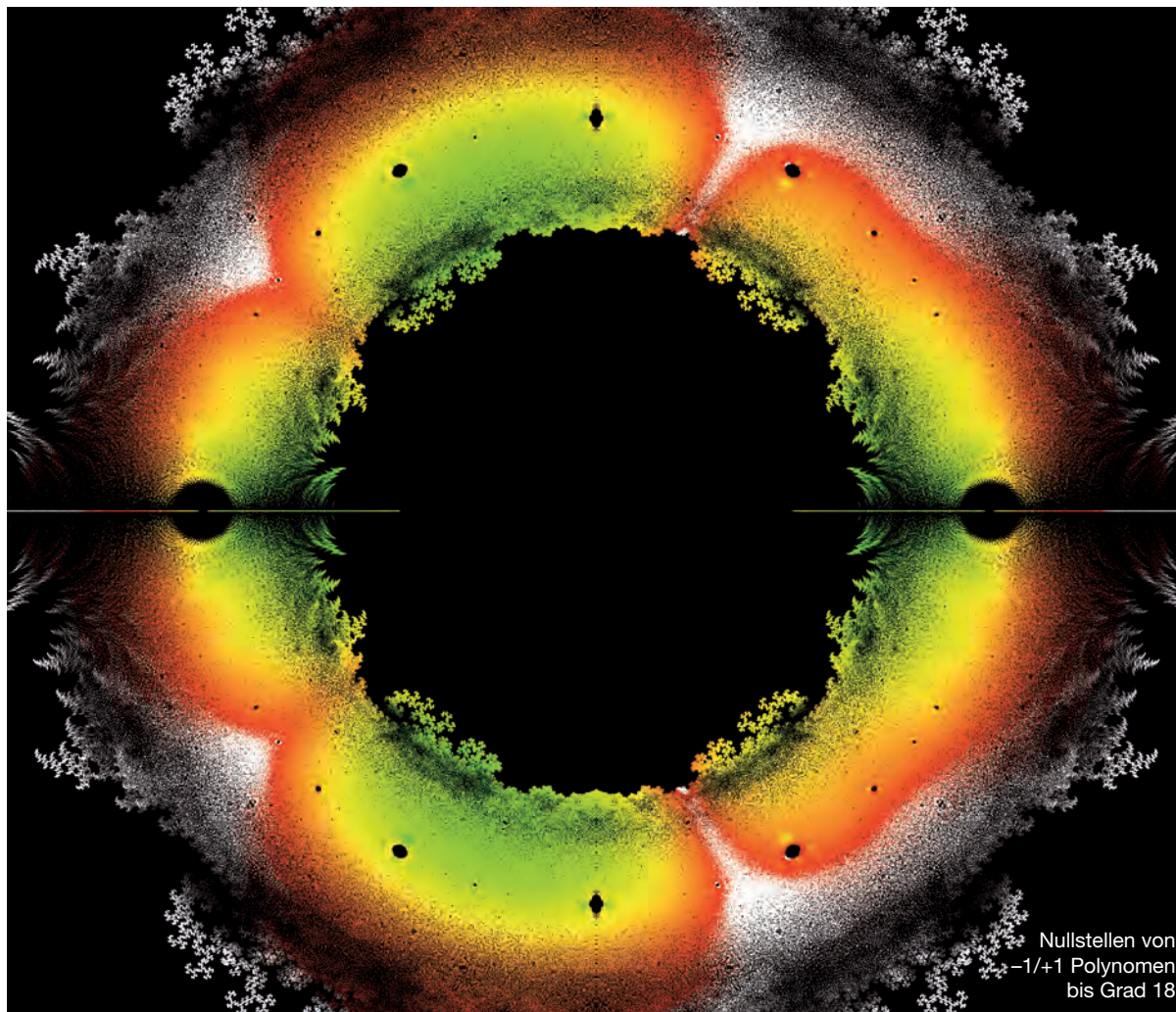
B. Kalantari *Polynomial Root-finding and Polynomiography* World Scientific, 2008

B. Kalantari www.polynomiography.com Polynomiography



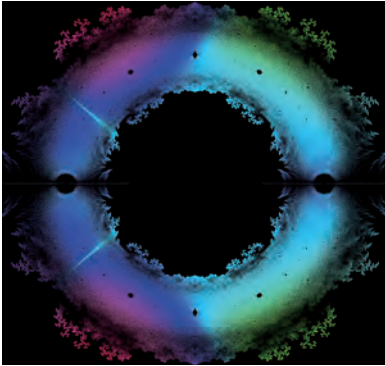
Nullstellen von Polynomen

in der komplexen Ebene

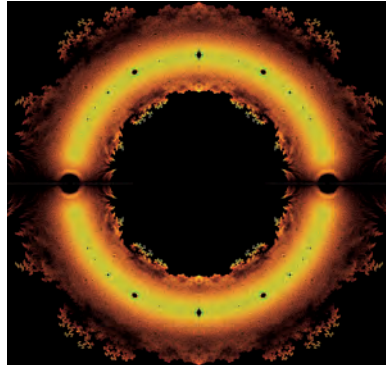


Bilder von Jonathan Borwein, Loki Jorgensen

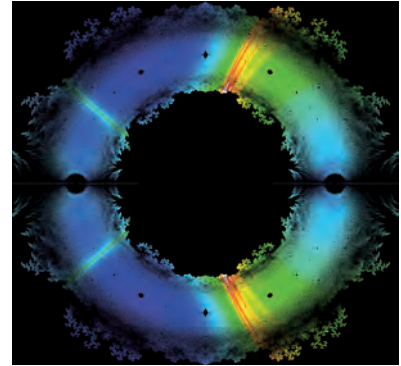
J. E. Littlewood *Some Problems in Real and Complex Analysis* Heath Mathematical Monographs, 1968



Einfärbung nach der Sensibilität der Polynome bzgl. kleiner Veränderungen der Nullstellen. Im violetten Bereich verändern sich die Polynome von Nullstelle zu Nullstelle am stärksten.



Einfärbung nach der lokalen Dichte der Nullstellen. In dem gelben, ringartigen Bereich um den Einheitskreis liegen die Nullstellen am dichtesten.



Einfärbung nach der Sensibilität der Nullstellen bzgl. der kontinuierlichen Variation des Koeffizienten a_j . Für die radialen Bandstrukturen gibt es noch keine mathematische Erklärung.

Wir betrachten die Verteilung von Nullstellen von besonders einfachen Polynomen. Hierzu beschränken wir uns auf Polynome in einer komplexen Variablen, deren Koeffizienten a_i ausschließlich aus den beiden Zahlen -1 und 1 bestehen:

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n = 0$$

Vom Grad n gibt es hiervon 2^{n+1} verschiedene Polynome. Zum Beispiel gibt es zum Grad 1 die vier Polynome

$$1 + x, 1 - x, -1 + x, -1 - x$$

mit den Nullstellen -1 und $+1$. Ab Grad 2 treten dann auch komplexe Nullstellen auf, wie die imaginäre Einheit $-i$ und $+i$ als Nullstellen des Polynoms

$$1 + x + x^2 + x^3$$

Im linken Bild sind die Nullstellen aller Polynome mit Koeffizienten -1 und $+1$ bis zum Grad 18 berechnet worden. Die Gesamtmenge der Nullstellen ergibt ein fraktalartiges Bild in der komplexen Ebene, das sich ungefähr über den Bereich $-1.5(1+i)$ bis $1.5(1+i)$ erstreckt. Die Farbkodierung zeigt die Stabilität einer Nullstelle bei einer kleinen, reellen Variation des Koeffizienten a_j , wobei rot eine schwache und grün eine starke Abhängigkeit zeigt. Aus den Bildern lassen sich neue wichtige Informationen ziehen, z. B. waren die leeren Stellen um die Einheitswurzeln zuvor unbekannt.

In der Zahlentheorie werden Nullstellenverteilungen als wichtiges Hilfsmittel beim Studium von Funktionen eingesetzt, s. a. die Seite 46 zur Riemann'schen Zeta-Funktion.

